Einführung in die Logik - 2

Aussagenlogik: Lexikon, Syntax und Semantik

Wiederholung: Was ist Logik?

- Logik : Die Lehre
  - » vom formal korrekten Schließen
  - » von den Wahrheitsbedingungen von Sätzen

➢ Unter welchen Bedingungen kann von einer als wahr vorausgesetzten Aussage auf die Wahrheit anderer Aussagen geschlossen werden?

➢ Unter welchen Bedingungen ist eine Aussage wahr?

Aussagenlogik: Beispiele

Maria studiert Computerlinguistik	=	p
Elena arbeitet in der Bibliothek.	=	q

*Maria studiert Computerlinguistik **und** Elena arbeitet in der Bibliothek.*

p UND q

*Maria studiert Computerlinguistik **oder** Elena arbeitet in der Bibliothek.*

p ODER q

*Maria studiert **nicht** Computerlinguistik.*

NICHT p

***Es ist nicht der Fall, dass** Maria Computerlinguistik studiert.*

Aussagenlogik: Beispiele

Man bekommt einen Schein	=	s
Man besteht die Klausur	=	k

*Man bekommt einen Schein, **wenn** man die Klausur besteht.*

WENN k DANN s

Man schreibt eine Hausarbeit	=	h

*Man bekommt einen Schein, **wenn** man die Klausur besteht **oder** eine Hausarbeit schreibt.*

WENN (k ODER h) DANN s

Wie wird ein Logiksystem beschrieben?

- Definition von Logiksprachen als formale Sprachen analog zur Definition der Grammatik einer natürlichen Sprache:
  - Lexikon
    - Was sind die Basisausdrücke (der Grundwortschatz) der Sprache?
  - Syntax
    - Wie werden die Basisausdrücke der Sprache zu komplexen Ausdrücken (Phrasen, Sätze) zusammengesetzt?
  - Semantik
    - Was ist die Bedeutung der einfachen und komplexen Ausdrücke?

Aussagenlogik: Lexikon

Das Lexikon (Vokabular) der Aussagenlogik (AL) besteht aus

- einer Menge von atomaren Aussagensymbolen p, q, r, s, ..., p‘, q‘, ...
- dem einstelligen Konnektor
  - $\neg$ (Negation - *nicht*)
- den zweistelligen Konnektoren
  - $\wedge$ (Konjunktion - *und*)
  - $\vee$ (Disjunktion - *oder*)
  - $\rightarrow$ (Konditional – *wenn ... dann ...*)
  - $\leftrightarrow$ (Bikonditional – *dann und nur dann, wenn ...*)

Aussagenlogik: Syntax

Syntax der AL: wohlgeformte Ausdrücke (wfA)

1. Jedes atomare Aussagensymbol ist ein wfA.
2. Jeder wfA, dem die Negation $\neg$ vorangeht, ist ein wfA.
3. Wenn A und B wfAs sind, dann auch
   - i. $(A \wedge B)$
   - ii. $(A \vee B)$
   - iii. $(A \rightarrow B)$
   - iv. $(A \leftrightarrow B)$
4. Nichts sonst ist ein wfA der AL.

- Beispiel für eine *rekursive Definition:*
  - (1): Rekursionsbasis
  - (2) und (3): Rekursionsschritte
  - (4): Restriktion (Rekursionsabschluss)

Übung zur Bestimmung von wfAs:

Beispiele für wfAs der AL:

- $\neg p$
- $\neg \neg q$
- $\neg \neg \neg r$
- $((p \wedge q) \vee r)$
- $(\neg(p \wedge q) \rightarrow r)$
- $(\neg(p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow r)$

- Jedes atomare Aussagensymbol ist ein wfA.
- Jeder wfA, dem die Negation $\neg$ vorangeht, ist ein wfA.
- Wenn A und B wfAs sind, dann auch
  - $(A \wedge B)$
  - $(A \vee B)$
  - $(A \rightarrow B)$
  - $(A \leftrightarrow B)$

Vereinfachung der Schreibweise durch Klammerkonvention

- äußere Klammern können fortgelassen werden
  - statt $(p \wedge q)$ vereinfacht $p \wedge q$
  - statt $(\neg(p \wedge q) \rightarrow r)$ vereinfacht $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

- $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$:
  - statt $(p \wedge q) \rightarrow r$ vereinfacht $p \wedge q \rightarrow r$
  - statt $p \rightarrow (\neg p \vee q)$ vereinfacht $p \rightarrow \neg p \vee q$

- bei mehrgliedrigen Konjunktionen und Disjunktionen können die Klammern fortgelassen werden:
  - statt $(p \wedge q) \wedge r$ bzw. $p \wedge (q \wedge r)$ vereinfacht $p \wedge q \wedge r$
  - statt $(p \vee q) \vee r$ bzw. $p \vee (q \vee r)$ vereinfacht $p \vee q \vee r$

Repräsentation syntaktischer Mehrdeutigkeiten

Zum Scheinerwerb muss man eine Klausur schreiben oder ein Referat halten und eine Hausarbeit verfassen.

Wenn man eine Klausur schreibt (**k**)
oder ein Referat hält (**r**)
und eine Hausarbeit verfasst (**h**),
dann bekommt man einen Schein (**s**).

Lesart 1: $(k \vee r) \wedge h \rightarrow s$

Lesart 2: $k \vee (r \wedge h) \rightarrow s$

Aussagenlogik: Semantik

Das Frege-Prinzip in der Semantik
(nach Gottlob Frege, Mathematiker u. Logiker, 1848-1925)

- Die Bedeutung eines komplexen Ausdrucks ergibt sich aus den (d.h. ist eine Funktion der) Bedeutungen seiner Teilausdrücke und der Art und Weise ihrer Zusammensetzung.

(1) (a) *Peter liebt Maria.*
(b) *Maria liebt Peter.*

(2) (a) *Peter liebt Maria und Maria liebt Peter.*
(b) *Peter liebt Maria oder Maria liebt Peter.*

Aussagenlogik: Semantik

Semantik der AL: Wahrheitswerte

- Die Bedeutung einer (atomaren oder komplexen) Aussage ist ihr Wahrheitswert „wahr“ (1, W) oder „falsch“ (0, F).

- Der Wahrheitswert einer komplexen Aussage ergibt sich aus den Wahrheitswerten seiner Teilausdrücke und den wahrheitsfunktionalen Eigenschaften der Konnektoren.

  - wahrheitsfunktionale Semantik der AL

  - Die wahrheitsfunktionalen Eigenschaften der Konnektoren können mittels Wahrheitswerttafeln dargestellt werden.

Semantik der AL: Wahrheitswerttafeln

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$

Semantik der AL: Wahrheitswerttafeln

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1						
1	0						
0	1						
0	0						

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Semantik der AL: Wahrheitswerttafeln

p	q	¬p	¬q	p ∧ q	p ∨ q	p → q	p ↔ q
1	1	0					
1	0	0					
0	1	1					
0	0	1					

Semantik der AL: Wahrheitswerttafeln

p	q	¬p	¬q	p ∧ q	p ∨ q	p → q	p ↔ q
1	1	0	0				
1	0	0	1				
0	1	1	0				
0	0	1	1				

Semantik der AL: Wahrheitswerttafeln

p	q	¬p	¬q	p ∧ q	p ∨ q	p → q	p ↔ q
1	1	0	0	1			
1	0	0	1	0			
0	1	1	0	0			
0	0	1	1	0			

Semantik der AL: Wahrheitswerttafeln

p	q	¬p	¬q	p ∧ q	p ∨ q	p → q	p ↔ q
1	1	0	0	1	1		
1	0	0	1	0	1		
0	1	1	0	0	1		
0	0	1	1	0	0		

Semantik der AL: Wahrheitswerttafeln

Anmerkungen zur Disjunktion

❖ *Wenn Sie die nächste Frage richtig beantworten, gewinnen Sie einen Mittelklassewagen oder 20.000 Euro in bar.*
  ➢ exklusives ODER

❖ *Wenn Sie den Logikkurs erfolgreich absolvieren wollen, sollten Sie die Hausaufgaben alleine oder in einer Arbeitsgruppe bearbeiten.*
  ➢ nicht-exklusives ODER

▪ das exklusive ODER kann mit Hilfe des logischen ODER definiert werden:
  ➢ p EXCL-OR q =df $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

Semantik der AL: Wahrheitswerttafeln

p	q	$\neg$p	$\neg$q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	0	1	1	1	
1	0	0	1	0	1	0	
0	1	1	0	0	1	1	
0	0	1	1	0	0	1	

Semantik der AL: Wahrheitswerttafeln

Anmerkungen zum Konditional

- *Wenn es stürmt, fällt mein Fahrrad um.*
  - nur falsch, wenn das Fahrrad nicht umfällt, obwohl es stürmt
  - zulässige Konstellationen:
    - es stürmt und das Fahrrad fällt um
    - es stürmt nicht, aber das Fahrrad fällt dennoch um
    - weder stürmt es noch fällt das Fahrrad um

- *Wenn Sie die Klausur bestehen, dann bekommen Sie einen Schein für den Logikkurs.*
  - soll i.d.R. nicht wahr sein, wenn
    - Sie keinen Schein bekommen, obwohl Sie die Klausur bestanden haben (entspricht den Wahrheitsbedingungen des Konditionals)
    - Sie einen Schein bekommen, ohne die Klausur bestanden zu haben (entspräche auch den Wahrheitsbedingungen des Konditionals).
  - verstecktes Bikonditional: "dann und nur dann, wenn"

Semantik der AL: Wahrheitswerttafeln

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

Semantik der AL: Wahrheitswerttafeln - Übersicht über alle aussagenlogischen Konnektoren

p	**q**	**$\neg$p**	**$\neg$q**	**p $\wedge$ q**	**p $\vee$ q**	**p $\rightarrow$ q**	**p $\leftrightarrow$ q**
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

Semantik der AL: Wahrheitswerttafeln

Übungen zur Konstruktion von Wahrheitswerttafeln

❖ $(p \vee q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$

❖ $(p \wedge q) \rightarrow \neg(p \vee r)$

➢ bei n Aussagesymbolen 2^n mögliche Verteilungen (= Zeilen)

Semantik der AL: Wahrheitsbedingungen

Wertzuweisungsfunktion V
(a.: Belegung, Valuation, Bewertung, Interpretationsfunktion)

- Eine Aussage der Form $\neg A$ ist wahr gdw. A falsch ist.
  - $V(\neg A) = 1$ gdw. $V(A) = 0$
- Eine Aussage der Form $A \wedge B$ ist wahr gdw. A und B beide wahr sind.
  - $V(A \wedge B) = 1$ gdw. $V(A) = 1$ und $V(B) = 1$
- Eine Aussage der Form $A \vee B$ ist wahr gdw. mindestens eine der beiden Teilaussagen A oder B wahr ist.
  - $V(A \vee B) = 1$ gdw. $V(A) = 1$ oder $V(B) = 1$ (oder beides)
- Eine Aussage der Form $A \rightarrow B$ ist wahr gdw. A falsch ist oder B wahr ist (oder beides).
  - $V(A \rightarrow B) = 1$ gdw. $V(A) = 0$ oder $V(B) = 1$ (oder beides)
- Eine Aussage der Form $A \leftrightarrow B$ ist wahr gdw. A und B beide wahr oder beide falsch sind.
  - $V(A \leftrightarrow B) = 1$ gdw. $V(A) = V(B)$

Semantik der AL: Wahrheitsbedingungen

Wertzuweisungsfunktion V:

- Die Wertzuweisungsfunktion V legt die Wahrheitswerte von atomaren Aussagen fest und beschreibt so partiell eine **Situation** (a.: Sachverhalt, State of Affairs)
  - ▶ **Zustandsbeschreibungen**

➢ modelltheoretische Semantik

Situation 1	Situation 2
V(TobiasH sitzt links neben Bettina) =1	V(TobiasG sitzt links neben Bettina) =1
V(Bettina sitzt in der ersten Reihe) = 1	V(Betina sitzt in der ersten Reihe) = 1
V(Die Vorlesung hat pünktlich angefangen) = 0	V(Die Vorlesung hat pünktlich angefangen) = 1
V(Es regnet im Neuenheimer Feld) = 1	V(Es regnet im Neuenheimer Feld) = 0

logische Eigenschaften von Aussagen

Tautologien - Widersprüche - Kontingenzen

- Ein wfA ist **tautologisch** gdw. sein Wahrheitswert für jede mögliche Wahrheitswert-Verteilung seiner Teilausdrücke immer 1 ist.
  - Beispiel: **$\neg (p \wedge \neg p)$**

logische Eigenschaften von Aussagen

p	**q**	**$\neg$p**	**p $\wedge$ $\neg$p**	**$\neg$ (p $\wedge$ $\neg$p)**			
1	1	0	0	1			
1	0	0	0	1			
0	1	1	0	1			
0	0	1	0	1			

logische Eigenschaften von Aussagen

Tautologien - Widersprüche - Kontingenzen

- Ein wfA ist **tautologisch** gdw. sein Wahrheitswert für jede mögliche Wahrheitswert-Verteilung seiner Teilausdrücke immer 1 ist.
  - Beispiel: $\neg (p \wedge \neg p)$
- Ein wfA ist **kontradiktorisch** (widersprüchlich) gdw. sein Wahrheitswert für jede mögliche Wahrheitswert-Verteilung seiner Teilausdrücke immer 0 ist.
  - Beispiel: $p \wedge \neg p$

logische Eigenschaften von Aussagen

p	**q**	$\neg$**p**	**p** $\wedge \neg$**p**	$\neg$ **(p** $\wedge \neg$**p)**			
1	1	0	0	1			
1	0	0	0	1			
0	1	1	0	1			
0	0	1	0	1			

logische Eigenschaften von Aussagen

Tautologien - Widersprüche - Kontingenzen

- Ein wfA ist **tautologisch** gdw. sein Wahrheitswert für jede mögliche Wahrheitswert-Verteilung seiner Teilausdrücke immer 1 ist.
  - Beispiel: $\neg (p \wedge \neg p)$

- Ein wfA ist **kontradiktorisch** (widersprüchlich) gdw. sein Wahrheitswert für jede mögliche Wahrheitswert-Verteilung seiner Teilausdrücke immer 0 ist.
  - Beispiel: $p \wedge \neg p$, $\neg (p \vee \neg p)$

logische Eigenschaften von Aussagen

p	q	¬p	p ∨ ¬p	¬ (p ∨ ¬ p)			
1	1	0	1	0			
1	0	0	1	0			
0	1	1	1	0			
0	0	1	1	0			

logische Eigenschaften von Aussagen

Tautologien - Widersprüche - Kontingenzen

- Ein wfA ist **tautologisch** gdw. sein Wahrheitswert für jede mögliche Wahrheitswert-Verteilung seiner Teilausdrücke immer 1 ist.
  - Beispiel: $\neg (p \wedge \neg p), p \vee \neg p$

- Ein wfA ist **kontradiktorisch** (widersprüchlich) gdw. sein Wahrheitswert für jede mögliche Wahrheitswert-Verteilung seiner Teilausdrücke immer 0 ist.
  - Beispiel: $p \wedge \neg p$, $\neg (p \vee \neg p)$

logische Eigenschaften von Aussagen

p	q	¬p	p ∨ ¬p	¬ (p ∨ ¬ p)			
1	1	0	1	0			
1	0	0	1	0			
0	1	1	1	0			
0	0	1	1	0			

logische Eigenschaften von Aussagen

Tautologien - Widersprüche - Kontingenzen

- Ein wfA ist **tautologisch** gdw. sein Wahrheitswert für jede mögliche Wahrheitswert-Verteilung seiner Teilausdrücke immer 1 ist.
  - Beispiel: $\neg (p \wedge \neg p)$, $p \vee \neg p$
- Ein wfA ist **kontradiktorisch** (widersprüchlich) gdw. sein Wahrheitswert für jede mögliche Wahrheitswert-Verteilung seiner Teilausdrücke immer 0 ist.
  - Beispiel: $p \wedge \neg p$, $\neg (p \vee \neg p)$
- Ein wfA, der weder tautologisch noch kontradiktorisch ist, ist **kontingent (informativ)**.
  - Beispiel: $p \rightarrow q$

logische Eigenschaften von Aussagen

p	q		$p \rightarrow q$				
1	1		1				
1	0		0				
0	1		1				
0	0		1				

logische Eigenschaften von Aussagen

Tautologien - Widersprüche - Kontingenzen

- Ein wfA ist **tautologisch** gdw. sein Wahrheitswert für jede mögliche Wahrheitswert-Verteilung seiner Teilausdrücke immer 1 ist.
  - Beispiel: $\neg (p \wedge \neg p)$, $p \vee \neg p$
- Ein wfA ist **kontradiktorisch** (widersprüchlich) gdw. sein Wahrheitswert für jede mögliche Wahrheitswert-Verteilung seiner Teilausdrücke immer 0 ist.
  - Beispiel: $p \wedge \neg p$, $\neg (p \vee \neg p)$
- Ein wfA, der weder tautologisch noch kontradiktorisch ist, ist **kontingent**.
  - Beispiel: $p \rightarrow q$, $\neg (p \rightarrow q)$

logische Eigenschaften von Aussagen

p	**q**		**$p \rightarrow q$**	**$\neg (p \rightarrow q)$**			
1	1		1	0			
1	0		0	1			
0	1		1	0			
0	0		1	0			

logische Beziehungen zwischen Aussagen

Logische Äquivalenz

- Zwei wfA sind logisch äquivalent gdw. wenn sie unter allen Zuweisungen von Wahrheitswerten zu den atomaren wfA identische Wahrheitswerte erhalten.
  - Beispiel 1: **$\neg (p \wedge \neg p)$** und **$p \vee \neg p$**

logische Beziehungen zwischen Aussagen

p		**¬p**	**p ∧ ¬p**	**¬ (p ∧ ¬p)**	**p ∨ ¬p**		
1		0	0	1	1		
0		1	0	1	1		

logische Beziehungen zwischen Aussagen

Logische Äquivalenz

- Zwei wfA sind logisch äquivalent gdw. wenn sie unter allen Zuweisungen von Wahrheitswerten zu den atomaren wfA identische Wahrheitswerte erhalten.
  - Beispiel 1: $\neg (p \wedge \neg p)$ und $p \vee \neg p$
  - Beispiel 2: $p \wedge \neg p$ und $\neg (p \vee \neg p)$

logische Beziehungen zwischen Aussagen

p		$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$p \vee \neg p$	$\neg(p \vee \neg p)$		
1		0	0	1	0		
0		1	0	1	0		

logische Beziehungen zwischen Aussagen

Logische Äquivalenz

- Zwei wfA sind logisch äquivalent gdw. wenn sie unter allen Zuweisungen von Wahrheitswerten zu den atomaren wfA identische Wahrheitswerte erhalten.
  - Beispiel 1: $\neg (p \land \neg p)$ und $p \lor \neg p$
  - Beispiel 2: $p \land \neg p$ und $\neg (p \lor \neg p)$
- ➢ A und B sind logisch äquivalent gdw. $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

logische Beziehungen zwischen Aussagen

Logische Äquivalenz

- Zwei wfA sind logisch äquivalent gdw. wenn sie unter allen Zuweisungen von Wahrheitswerten zu den atomaren wfA identische Wahrheitswerte erhalten.
  - Beispiel 1: $\neg (p \land \neg p)$ und $p \lor \neg p$
  - Beispiel 2: $p \land \neg p$ und $\neg (p \lor \neg p)$
- ➢ A und B sind logisch äquivalent gdw. $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist.

- eine Frage aus der letzten Sitzung: Sind die Aussagen $\neg(p \lor q) \land r$ und $\neg p \land \neg q \land r$ äquivalent?
  - ▶ Test mit Wahrheitswerttafeln:

$$\neg(p \lor q) \land r \leftrightarrow \neg p \land \neg q \land r$$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

logische Beziehungen zwischen Aussagen

Logische Äquivalenz

- Zwei wfA sind logisch äquivalent gdw. wenn sie unter allen Zuweisungen von Wahrheitswerten zu den atomaren wfA identische Wahrheitswerte erhalten.
  - Beispiel 1: $\neg (p \wedge \neg p)$ und $p \vee \neg p$
  - Beispiel 2: $p \wedge \neg p$ und $\neg (p \vee \neg p)$
- ➢ A und B sind logisch äquivalent gdw. $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist.

Logische Folgerung / Implikation

- Der wfA B folgt aus dem wfA A (A |= B) gdw. B in allen Fällen wahr ist, in denen A wahr ist.
  - Beispiel: $p \models q \rightarrow p$

logische Beziehungen zwischen Aussagen

p	q		$q \rightarrow p$				
1	1		1				
1	0		1				
0	1		0				
0	0		1				

logische Beziehungen zwischen Aussagen

Logische Äquivalenz

- Zwei wfA sind logisch äquivalent gdw. wenn sie unter allen Zuweisungen von Wahrheitswerten zu den atomaren wfA identische Wahrheitswerte erhalten.
  - Beispiel 1: $\neg (p \wedge \neg p)$ und $p \vee \neg p$
  - Beispiel 2: $p \wedge \neg p$ und $\neg (p \vee \neg p)$
- ➢ A und B sind logisch äquivalent gdw. $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist.

Logische Folgerung / Implikation

- Der wfA B folgt aus dem wfA A (A |= B) gdw. B in allen Fällen wahr ist, in denen A wahr ist.
  - Beispiel: $p \models q \rightarrow p$
- ➢ A |= B gdw. $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist.

logische Beziehungen zwischen Aussagen

p	q		$q \rightarrow p$	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$			
1	1		1	1			
1	0		1	1			
0	1		0	1			
0	0		1	1			

wichtige Gesetze (Theoreme) der Aussagenlogik

Idempotenz-Gesetze	$A \vee A$	$\Leftrightarrow$	A
	$A \wedge A$	$\Leftrightarrow$	A
Kommutativ-Gesetze	$A \vee B$	$\Leftrightarrow$	$B \vee A$
	$A \wedge B$	$\Leftrightarrow$	$B \wedge A$
Assoziativ-Gesetze	$(A \vee B) \vee C$	$\Leftrightarrow$	$A \vee (B \vee C)$
	$(A \wedge B) \wedge C$	$\Leftrightarrow$	$A \wedge (B \wedge C)$
Distributiv-Gesetze	$A \vee (B \wedge C)$	$\Leftrightarrow$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
	$A \wedge (B \vee C)$	$\Leftrightarrow$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

wichtige Gesetze (Theoreme) der Aussagenlogik

Identitäts-Gesetze	$A \vee \bot$	$\Leftrightarrow$	A
	$A \vee \mathrm{T}$	$\Leftrightarrow$	T
	$A \wedge \bot$	$\Leftrightarrow$	$\bot$
	$A \wedge \mathrm{T}$	$\Leftrightarrow$	A
Komplement-Gesetze	$A \vee \neg A$	$\Leftrightarrow$	⮫
	$A \wedge \neg A$	$\Leftrightarrow$	⮰
	$\neg\neg A$	$\Leftrightarrow$	A

De Morgansche Gesetze (nach Augustus de Morgan, 1806-1871)

$\neg(A \vee B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg A \wedge \neg B$
$\neg(A \wedge B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg A \vee \neg B$

- T / $\bot$: Platzhalter für einen beliebigen wahren bzw. falschen Ausdruck

wichtige Gesetze (Theoreme) der Aussagenlogik

Konditional-Gesetze	$A \rightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\neg A \vee B$
	$A \rightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\neg(A \wedge \neg B)$
	$A \rightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\neg B \rightarrow \neg A$
Bikonditional-Gesetze	$A \leftrightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
	$A \leftrightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$

Recap Aussagenlogik
Prof. Dr. Anette Frank
Formale Semantik, WS 2014/15

Modelltheoretische Semantik

- als formale Methode zur Bedeutungsrepräsentation
- als formales System für Inferenz

aus: Anette Frank, Formale Semantik, WS 2014/15

Wahrheitsfunktionale Semantik

Man kennt die **Bedeutung eines (Deklarativ-)Satzes**, wenn man weiß, **wie die Welt aussehen muß, damit der Satz wahr ist**

⇒ Man kennt seine Wahrheitsbedingungen

⇒ Man kennt, gegeben die Welt, seinen Wahrheitswert

Die Wahrheitsbedingungen sind in einem **Modell** definiert

⇒ **modelltheoretische Semantik** **(Alfred Tarski)**

aus: Anette Frank, Formale Semantik, WS 2014/15

- **Aussagenlogik** ist eine Logik der **wahrheitsfunktionalen** Konnektive
- Dabei ist zu leisten
  1. Abbildung natürlichsprachlicher Aussagen in logische Formeln
  2. Abbildung atomarer Formeln in **Wahrheitswerte (im Modell)**
  3. **Kompositionale Berechung von Wahrheitswerten** für komplexe Formeln

aus: Anette Frank, Formale Semantik, WS 2014/15

Kompositionalität

Das Prinzip der Kompositionalität (Gottlob Frege)

- Die Bedeutung eines komplexen Ausdrucks ergibt sich aus den Bedeutungen seiner Teile *sowie der Art der Komposition*
  - Beispiel: Konnektive *wenn*, *und*:
    - **Wenn** [Maria wäscht ab], [Johann kocht]
      (≠ [Maria wäscht ab] und [Johann kocht])
    - [Maria geht tanzen] **und** [Johann spielt Tennis]
      (≠ Wenn [Maria geht tanzen], [Johann kocht])

- **Zusammengesetzte (komplexe) Aussagen** werden aus atomaren Aussagen mithilfe von **Konnektiven** gebildet

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

aus: Anette Frank, Formale Semantik, WS 2014/15

Wahrheitsfunktionale Konnektive

Ein Konnektiv ist **wahrheitsfunktional** gdw. für jede mit diesem Konnektiv konstruierte zusammengesetzte Aussage gilt:

- Der Wahrheitswert ist eine **Funktion der Wahrheitswerte der Teilaussagen** (als **Wahrheitswerttabelle** darstellbar)
- Äquivalent: Die Ersetzung von Teilaussagen durch andere Aussagen mit gleichem WW ändert den WW der zusammengesetzten Aussage nicht.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

aus: Anette Frank, Formale Semantik, WS 2014/15

Aussagenlogik – Semantik

- Eine **Belegung (Valuation)** ist eine Funktion V: PROP $\rightarrow$ {0,1}, die den Aussagenvariablen Wahrheitswerte zuweist.
- **Interpretation komplexer Formeln:**
  - $V(\neg A) = 1$ gdw $V(A) = 0$
  - $V(A \wedge B) = 1$ gdw $V(A) = 1$ und $V(B) = 1$
  - $V(A \vee B) = 1$ gdw $V(A) = 1$ oder $V(B) = 1$
  - $V(A \rightarrow B) = 1$ gdw $V(A) = 0$ oder $V(B) = 1$
  - $V(A \leftrightarrow B) = 1$ gdw $V(A) = V(B)$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

aus: Anette Frank, Formale Semantik, WS 2014/15

Logische Eigenschaften von Aussagen

- Eine Belegung oder Valuation V **erfüllt** eine Formel A gdw $V(A) = 1$.
- Eine Formel A ist **erfüllbar** gdw es eine Belegung V gibt sodass $V(A) = 1$.
- Eine Formel A ist **gültig** gdw $V(A) = 1$ für **alle** Belegungen V. Gültige Formeln heißen auch **Tautologien**.
- Eine Formel A ist **widersprüchlich (kontradiktorisch)** gdw $V(A) = 0$, für **jede** Valuation V.
- Formeln, die weder gültig noch widersprüchlich sind, heißen **kontingente Aussagen**.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

aus: Anette Frank, Formale Semantik, WS 2014/15

Logische Eigenschaften von Aussagen

- Zwei Formeln sind **logisch äquivalent** wenn sie für alle möglichen Belegungen dieselben Wahrheitswerte annehmen.
- Beispiele?
  - $\neg (p \wedge \neg p)$ und $(p \vee \neg p)$
  - $p \wedge \neg p$ und $\neg (p \vee \neg p)$
- A und B sind logisch äquivalent ($\Leftrightarrow$) gdw. $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

aus: Anette Frank, Formale Semantik, WS 2014/15

Folgerung (Implikation)

- Eine Belegung V **erfüllt (gleichzeitig)** eine Formelmenge Γ wenn V alle $A \in \Gamma$ erfüllt.
- Eine Formel A **folgt** aus Γ gdw jede Belegung V, die gleichzeitig Γ erfüllt, auch A erfüllt.
  - Notation: $\boldsymbol{\Gamma \vDash A}$.
- Formel B folgt aus Formel(menge) A ($\{A\} \models B$) gdw. B in allen Fällen wahr ist, in denen A wahr ist.
  - $\{A\} \models B$ gdw. $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

BACKUP

Aussagen der natürlichen Sprache

- sind Sätze, die wahr oder falsch sein können,
  (auch wenn wir nicht wissen, ob sie wahr oder falsch sind)

Beispiele

Hamburg ist die deutsche Stadt mit der zweitgrößten Einwohnerzahl.	wahr
Hamburg liegt südlich von München.	falsch
Am 6. April 1299 fielen in Hamburg 17,5 mm Niederschlag.	??
Am 27. April 2016 scheint in Hamburg die Sonne länger als 4 Stunden.	??
Am 6. April 2299 wird der Pegel der Elbe die 7m-Marke übersteigen.	??

keine Aussagen sind z.B.

Fragen:	Liegt Hamburg nördlich von München?
Aufforderungen, Befehle:	Fahr nach Kiel!
Inhärent widersprüchliche Sätze:	Dieser Satz ist falsch.

FGI-1, Habel / Eschenbach — Kap 2. Aussagenlogik–Syntax [1]

Aussagen – Die Basis für Logik-Systeme

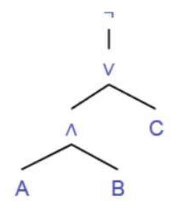
Aussagen, Fragen & Befehle

- Die Untersuchung von Fragen kann systematisch auf die Untersuchung von Aussagen zurückgeführt werden.
  - Liegt Hamburg nördlich von München?
    besitzt zwei korrespondierende Antworten:
    - ✶ Ja! ≈ Hamburg liegt nördlich von München.
    - ✶ Nein! ≈ Hamburg liegt nicht nördlich von München.
- Die Untersuchung von Befehlen kann auf die Untersuchung von Aussagen zurückgeführt werden.
  - Begib Dich nach Kiel!
    ≈ Verändere Deinen Aufenthaltsort derart, dass Du in Kiel bist.
  - ➔ Voraussetzung der Befehlsausführung:
    „Du bist nicht in Kiel" ist wahr.
  - ➔ Der Befehl ist erfolgreich ausgeführt:
    „Du bist in Kiel" ist wahr.

FGI-1, Habel / Eschenbach — Kap 2. Aussagenlogik–Syntax [2]

Strukturbäume

Obwohl die Formeln der Logik (lineare) Zeichenketten sind, können wir sie auch in einer (hierarchischen) Baumstruktur (mit Wurzel) darstellen. (vgl. Biggs, Kapitel 8.5 und 9.1)

Aussagesymbole	Blatt-Knoten des Baumes	A, B, ...
Junktoren	innere Knoten des Baums	¬, ∧, ∨, ...
komplexe Formeln ¬((A ∧ B) ∨ C)	Bäume • Hauptoperator markiert die Wurzel. • Teilformeln entsprechen Teilbäumen. • Die Reihenfolge der Teilformeln wird beibehalten.	

- Die Bäume werden mit der Wurzel oben und den Blättern unten gezeichnet.
- ¬ hat einen Nachfolger, die anderen Junktor-Knoten haben zwei Nachfolger.
- Klammern kommen in den Bäumen nicht vor.
- Kommt eine Teilformel mehrfach in der Formel vor, dann kommt der entsprechende Teilbaum auch mehrfach (als Kopie) vor.

FGI-1, Habel / Eschenbach — Kap 2. Aussagenlogik–Syntax [25]

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg